APRIL/MAY 2024

CMA41/FMA41 — VECTOR ANALYSIS AND FOURIER SERIES

Shanmuga Industries Arts & Science College T.V.Malai

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL the questions.

1. Define derivative of a vector.
வெக்டர் வகைகெழு வரையறு.

2. If $\vec{F} = xyz\vec{i} + xz^2\vec{j} - y^3\vec{k}$, find $\frac{\partial \vec{F}}{\partial y}$.

$\vec{F} = xyz\vec{i} + xz^2\vec{j} - y^3\vec{k}$ எனில் $\frac{\partial \vec{F}}{\partial y}$ காண்க.

3. If $\vec{F} = x^2y\vec{i} - 2xz\vec{j} + 2yz\vec{k}$ then find $div\ \vec{F}$.

$\vec{F} = x^2y\vec{i} - 2xz\vec{j} + 2yz\vec{k}$ எனில் $div\ \vec{F}$ காண்க.

4. Determine the constant 'a' so that the vector
$\vec{F} = (x+3y)\vec{i} + (y-2z)\vec{j} + (x+az)\vec{k}$ is solenoidal.

$\vec{F} = (x+3y)\vec{i} + (y-2z)\vec{j} + (x+az)\vec{k}$ என்பது சுருள்வு திசையன் எனில் 'a'என்ற மாறிலியைக் காண்க.

5. Show that $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ is a conservative vector field.

$\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ -ஐ காப்பு நிலை திசையன் களம் என நிரூபி.

6. Find the angle between the surface $z = x^2 + y^2 - 3$ and $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ at $(2, -1, 2)$.

$z = x^2 + y^2 - 3$ மற்றும் $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ என்ற பரப்புகள் $(2, -1, 2)$ இடத்து, இடையே உள்ள கோணம் காண்க.

7. State stoke's theorem.

ஸ்டோக் தேற்றத்தைக் கூறு.

8. Prove that $\iint_s \frac{\vec{r}\cdot\hat{n}}{r^2} ds = \iiint_v \frac{dv}{r^2}$.

$\iint_s \frac{\vec{r}\cdot\hat{n}}{r^2} ds = \iiint_v \frac{dv}{r^2}$ என நிறுவுக.

9. Express $F(x) = C - x$ where $0 < x < C$ as a cosine series with period $2C$.

$0 < x < C$ என்ற $2C$ இடைவெளியில் $F(x) = C - x$ யின் கொசைன் தொடரை விவரி.

10. State parseval's formula in Fourier series.

பூரியர் தொடர்களின் பார்சீவல் சூத்திரத்தைக் கூறு.

17. Prove that $\nabla\cdot(r^n\vec{r}) = (n+3)r^n$ and $\nabla\times(r^n\vec{r}) = 0$.

$\nabla\cdot(r^n\vec{r}) = (n+3)r^n$ மற்றும் $\nabla\times(r^n\vec{r}) = 0$ என நிறுவுக.

18. Evaluate $\iint_s \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds$ where $\vec{F} = z\vec{i} + x\vec{j} - 3y^2z\vec{k}$ and s is the surface of the cylinder $x^2 + y^2 = 16$ included in the first octant between $z = 0$ and $z = 5$.

$\vec{F} = z\vec{i} + x\vec{j} - 3y^2z\vec{k}$ தளங்கள் $z = 0$ மற்றும் $z = 5$ ஆகியவற்றிற்கிடையிலும் முதல் அரைக்கால் பகுதியில் அமைவதுமான உருளை $x^2 + y^2 = 16$ ன் மேற்பரப்பு s எனில் $\iint_s \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds$ ன் மதிப்பு காண்க.

19. Verify Stoke's theorem for $F = (2x - y)\vec{i} - yz^2\vec{j} - y^2z\vec{k}$ where s is the upper half surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ and c is the boundary.

$F = (2x - y)\vec{i} - yz^2\vec{j} - y^2z\vec{k}$ மேலும் s என்பது $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ மற்றும் c என்ற கோளத்தின் மேல் அரைப்பகுதி எனில் ஸ்டோக்ஸ் தேற்றத்தை சரிபார்க்க்:

20. Find a fourier series to represent $f(x) = 2x - x^3$, $0 \le x \le 3$.

$f(x) = 2x - x^3$, $0 \le x \le 3$ என்ற சார்பின் பூரியர் விரிவினையை கண்டுபிடி.

---

15. (a) Find fourier series for $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi<x<0\\ x, & 0<x\le\pi\end{cases}$ and hence deduce that $\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{9^2}+\cdots$

$f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi<x<0\\ x, & 0<x\le\pi\end{cases}$ யின் பூரியர் தொடரை காண்க மற்றும் $\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{9^2}+\cdots$

Or

(b) Write the values of a_0, a_n, b_n in the fourier expansion of $f(x)$ in the interval $(0, 2l)$.

$(0, 2l)$ இடைவெளியில் $f(x)$ன் பூரியர் விரிவாக்கத்தில் a_0, a_n, b_n ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை எழுதுக.

SECTION C — ($3 \times 10 = 30$ marks)

Answer any THREE questions.

16. Find the unit tangent vector to any point on the curve $x=t^2+1, y=4t-3, z=2t^2-6t$ and determine the unit tangent vector at the point where $t=2$.

$x=t^2+1, y=4t-3, z=2t^2-6t$ என்ற வளைவரையின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் அலகுத் தொடுகோட்டு வெக்டர் காண்க. மேலும் $t=2$ எனில் அந்த புள்ளியில் அலகுத் தொடுகோடு காண்க.

SECTION B — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer ALL the questions.

11. (a) Find the velocity, speed and acceleration of the particle whose path is given by $\vec{r}=3\cos 2t\vec{i}+2\sin 3t\vec{k}$.

ஒரு துகளின் பாதை $\vec{r}=3\cos 2t\vec{i}+2\sin 3t\vec{k}$ -ன் திசைவேகம், வேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

Or

(b) If $\vec{F}=t\vec{i}+t^2\vec{j}+t^3\vec{k}$, $\vec{G}=t^3\vec{i}+t^2\vec{j}+t\vec{k}$ find

(i) $\frac{d}{dt}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right)$

(ii) $\frac{d}{dt}\left(\vec{F}\times\vec{G}\right)$.

$\vec{F}=t\vec{i}+t^2\vec{j}+t^3\vec{k}$, $\vec{G}=t^3\vec{i}+t^2\vec{j}+t\vec{k}$ எனில்

(i) $\frac{d}{dt}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right)$

(ii) $\frac{d}{dt}\left(\vec{F}\times\vec{G}\right)$ காண்க.

12. (a) If ϕ and ψ be two scalar point functions, prove that $\text{grad}(\phi\psi) = \phi \text{ grad } \psi + \psi \text{ grad } \phi$.

ϕ மற்றும் ψ என்பது இரண்டு ஸ்கேலார் புள்ளி சார்பு எனில், $\text{grad}(\phi\psi) = \phi \text{ grad } \psi + \psi \text{ grad } \phi$ என நிரூபி.

Or

(b) Prove that

$\vec{F} = (x^2 - yz)\vec{i} + (y^2 - zx)\vec{j} + (z^2 - xy)\vec{k}$ is irrotational.

$\vec{F} = (x^2 - yz)\vec{i} + (y^2 - zx)\vec{j} + (z^2 - xy)\vec{k}$ என்ற வெக்டர் சுழலில்லாதது என நிரூபி.

13. (a) Find the total work done in a moving particle in a force field given by $\vec{F} = 3xy\vec{i} - 5z\vec{j} + 10x\vec{k}$ along the curve $x = t^2 + 1, y = 2t^2, z = t^3$ from $t = 1$ to $t = 2$.

$t = 1$ முதல் $t = 2$ வில் $x = t^2 + 1, y = 2t^2, z = t^3$ என்ற வளைவரையில் $\vec{F} = 3xy\vec{i} - 5z\vec{j} + 10x\vec{k}$ க்கு விசை செய்த மொத்த வேலையை காண்க.

Or

(b) Evaluate $\iiint_v \nabla \cdot \vec{F}\, dv$ where $\vec{F} = 2xy\vec{i} + yz^2\vec{j} + xz\vec{k}$ bounded by $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 2$, $y = 1$ and $z = 3$.

$x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$ என்பவைகளால் அடைபடும் வரம்பிற்கு மேல் $\vec{F} = 2xy\vec{i} + yz^2\vec{j} + xz\vec{k}$ என்பதற்கு $\iiint_v \nabla \cdot \vec{F}\, dv$ -ன் மதிப்பை காண்க.

14. (a) Verify Gauss divergence theorem for $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ taken over the cube bounded by the plane $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ and $z = 1$.

$\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ க்கு $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$ என்ற தளங்களால் அடைக்கப்படும் கன சதுரத்தில் காஸ் பாய்வுத் தேற்றத்தை சரிபார்.

Or

(b) Using Green's theorem prove that $\int_C (3x + 4y)dx + (2x - 3y)dy = -8\pi$.

கிரீனின் தேற்றத்தை உபயோகித்து $\int_C (3x + 4y)dx + (2x - 3y)dy = -8\pi$ என நிரூபி.